**СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Планирование имитационного эксперимента. Построение оптимальных планов экспериментов**

Результат имитационного эксперимента - выяснение зависимостей параметров процесса (мат. ожидание, дисперсия и т.д.) от различных факторов. Один из возможных результатов - представления результатов имитационного эксперимента - регрессионная модель, то есть модель вида:

Для выяснения влияния различных факторов (входных в модель данных) должно быть выполнено планирование эксперимента (в частности регрессионных экспериментов, направленных на формирование регрессионной модели).

Таким образом, цель планирования и последующего эксперимента - определение математической модели процесса (объекта) - планирование эксперимента по определению математической модели. Цель построения модели - определение связи между изменяемыми параметрами системы (объекта, процесса), то есть входными данными и выходом. Так как результат наблюдения - СВ, поэтому модель определяет связь средних значений исследуемых величин с контролируемыми переменными в виде:

*,*

где *M* - среднее значение величины *Y* (выход системы) при задаваемых (известных, контролируемых) значения выходных переменных *Z*. Функция - функция, аппроксимирующая среднее значение величины *Y*, зависит от параметров , называется функцией отклика или функцией регрессии (в общем случае вид функции неизвестен).

**Регрессионные модели экспериментов**

Схема имитационной модели системы (процесса):



Функционирование имитационной модели предполагает, что контролируемые переменные - переменные состояния, - по некоторому алгоритму преобразуются в выходную переменную *Y*. Так как точная аналитическая зависимость между и *Y* неизвестна, то по результатам эксперимента (статического, имитационного) эта зависимость может быть получена.

Так как имеется возможность выбора (задания) значения (контролируемых переменных), то выбор оптимальных значений позволяет получить регрессионную модель системы с требуемой точностью (то есть точность модели оценена и она должна быть оптимальной).

Таким образом, - одно значение входного в модель параметра (вес переменных состояния). Тогда - одна из возможных комбинаций , для которой реализуется один опыт (эксперимент).

Множество - множество возможных комбинаций входных параметров - переменных состояния, для которых проводятся эксперименты. Если множество содержит два и более элемента, то такое множество называется активным множеством эксперимента (то есть, если , то - активное множество). Если , то множество - пассивное.

**Математическая формулировка задача планирования**

1) Заданы множества значений:

- множество возможных одной из компонент вектора . Вид вектора - вектор фазовых координат - задаваемых входных для модели параметров, то есть:

- множество возможных значений выхода модели. Результатом имитационного эксперимента с моделью является сопоставление значениям значения , где *k* - индекс опыта, *F* - некоторый оператор, отображающий одно множество в другое (тогда оператор *F* может быть назван моделью объекта);

2) Целью проведения статистического (имитационного) эксперимента является определение отображения (оператора) вида: , то есть построение оператора (модели) *F* - задача оптимального планирования имитационного эксперимента.

3) Так как в имитационной модели выходная переменная *Y* зависит от контролируемых переменных , то в результате *m*-кратного проведения эксперимента получен вектор , который зависит от матрицы входных данных модели.

,

где – значение *j*-ой фазовой координаты в *i*-ом эксперименте ( – один эксперимент).

Таким образом, вектор (где *k –* номер строки матрицы *Z*) - вектор входных переменных - один из наборов значений в плане эксперимента (*k –* номер эксперимента), матрица *Z* - матрица плана эксперимента, *Y* - вектор результатов эксперимента.

**Возможные варианты подхода к построению статистических (регрессионных) моделей после реализации эксперимента:**

1. Функция известна (то есть известен вид этой функции, требуется определить значения параметров ;
2. Известно, что функция совпадает с одной из функций:

,

где соответствует функция (функция соответствующего вида), - соответствующий набор параметров этой функции. В результате обработки определяется, какая из функций соответствует наилучшим образом и необходимо определить значения параметров .

1. Вид функции неизвестен, он должен быть определён, а также определены параметры .

Наиболее исследован первый тип рассмотренных постановок задач. То есть при формировании плана эксперимента предполагается, что зависимость между *Y* и вектором имеет вид:

, (1)

где - функция регрессии, параметры которой должны быть определены, поверхность (функция отклика), - набор определенных параметров.

В теории планирования экспериментов с имитационными моделями систем наиболее исследован случай, когда функция является линейной по параметрам . Частным случаем модели (1) является случай, когда контролируемые переменные линейно входят в правую часть (1). Тогда *k*-ый результат (результат *k*-го эксперимента) определяется в виде:

,

где – случайная ошибка, полученная в результате эксперимента (m опытов).

**Определение оценок параметров регрессионной модели**

Определение метода идентификации значений параметров поясним на примере. В качестве входных данных моделей используются три фазовые координаты . Реализуются три опыта, в каждом из которых задаются определенные значения входных параметров (фазовых координат ). Тогда через может быть обозначено значение *j-*ой переменной в этом опыте.

Выражение (в упрощенной форме) для регрессионной модели, построенной по результатам *k*-го эксперимента, имеет вид:

(Естественно, что члены вида ; и т.д., ; и т.д. опущены).

Для трех опытов выход системы связан со значениями входных параметров о. о.:

;

;

;

Таким образом, – первая точка плана эксперимента, – вторая точка плана эксперимента, – третья точка плана эксперимента. Выражение в матричной форме для определения значений (оценок) параметров имеют вид:

или

, (1)

где *Y* – вектор наблюдений выхода в точках плана, *Z(F)* – матрица значений функций в точках плана (то есть – функция, через которую выражается *j*-ая переменная в *i*-ом эксперименте).

Выражение может быть представлено в альтернативном виде:

,

где ,

Матрица *M* называется информационной матрицей плана. Выражения (1) сформированы при условии, что дисперсии наблюдений определены и одинаковы, то есть:

–

дисперсия *k*-го наблюдения. Таким образом, выражения (1) для .

**Получение выражений для вычисления матриц *M* и *Y*:**

(2)

Элементы, относящиеся к первой компоненте ();

Элементы, относящиеся ко второй компоненте ().

(3)

В общем виде, если , выражение (3) может быть представлено в виде:

(4)

где – выражение для переменной (*l*-ой переменной) в *i*-ом полиноме для *i*-го опыта.

Аналогичные выражения могут быть получены для матрицы , то есть:

В рассматриваемом случае:

В скалярном виде выражение для получения компоненты вектора имеет вид:

(5)

, (6)

где – выражение для в транспонированной матрице *Z*.

Выражения (3), (4), (5), (6) построены в предположении одинаковых значений дисперсий наблюдений для каждого *k*-го опыта (то есть ) разнозначные измерения.

В случае, если дисперсии наблюдений разные, выражения (3), (4), (5), (6) могут быть модифицированы с. о.:

, (7)

где – дисперсия соответствующего опыта.

Выражения (3), (4), (7) являются базовыми при планировании регрессионного эксперимента.

**Построение оптимальных планов регрессионных экспериментов**

Выражение (1) позволяет получить опции неизвестных параметров регрессионной модели.

Так как эксперимент активный, то возможен выбор значений контролируемых переменных, то есть возможно задание различных векторов *Z* входных данных - комбинаций значений фазовых координат.

Точность оценивания параметров (вектор ) зависит от информационной матрицы *M*, которая определяется множеством точек плана эксперимента ( - комбинация входных значений). Таким образом, набор точек - план эксперимента.

Дискретным планом эксперимента называют матрицу вида:

(1)

где - соответствующие комбинации исходных данных, - частота повторения *i*-го набора входных данных при проведении *N* опытов. Таким образом, - число повторений комбинации в *N* опытах.

(2)

Таким образом, всего *n* комбинаций входных данных, проводится *N* опытов, в *N* опытах каждая комбинация исходных данных повторяется раз (в результате определяется параметр - частота повторения комбинации ).

Таким образом, задача планирования эксперимента (регрессионного) сводится к определению параметров так, чтобы оценки были оптимальными в соответствии с заданным критерием.

**Исходная форма выражения для определения элементов информационной матрицы:**

1. При одинаковых дисперсиях наблюдений ():

, (3)

где – число опытов, – элемент матрицы , – элемент

матрицы F.

1. При различных значениях дисперсий наблюдений :

(4)

1. Альтернативный вариант выражений (3) и (4) с заданием элементов матрицы и матрицы F:

;

1. Выражение для определения элементов информационной матрицы при учете частот повторения комбинаций входных данных :

, либо ,

где – дисперсия наблюдения (рассматриваются планы, для которых ).

План называется -оптимальным, где – критерий.